Gewone differentiaalvergelijkingen
Cursus 2001-2002.
Tentamen, 1 maart 2002, duur: 3 uur.

1.[1] Los op (en licht de gevolgde methode toe):
(a)[3] $2xy + (2x^2 + y^3)y' = 0$ met integrerende factor die alleen van y afhangt,
(b)[3] $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ met variatie van constanten,
(c)[3] $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ door passende keuze van een particuliere oplossing.

2.[1] Beschouw de differentiaalvergelijking $y' = 4x\sqrt{y}$.
(a)[3] Bepaal alle oplossingen en schets deze voor verschillende waarden van de integratieconstante in het (x, y)–vlak.
(b)[2] Laat zien dat door het punt $x = 1$, $y = 0$ verschillende oplossingen gaan.
(c)[2] Toon aan dat de (maximale) oplossingen allemaal op de gehele $\mathbb{R}$ gedefinieerd zijn. ("Plak oplossingen aan elkaar".)
(d)[2] Bespreek het bestaan en de eenduidigheid van de oplossingen door elk van de punten (x_0, y_0) met $y_0 \geq 0$ in het licht van de stellingen van Picard-Lindelöff (met de locale Lipschitz voorwaarde) en Peano.

3.[1] (a)[2] Beschouw een 2×2 systeem van eerste orde differentiaalvergelijkingen van de vorm $y'(x) = Ay(x)$ waarin A een constante 2×2 matrix is. Geef nodige en voldoende voorwaarden voor de eigenwaarden van A opdat geldt dat *elke* oplossing van het systeem naar 0 convergeert als $x \to \infty$. Verklaar je antwoord.
(b)[4] Bepaal een fundamentele matrix $Y(x)$ met $Y(0) = I$ van

$$y'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} y(x).$$

Voldoen de oplossingen van dit systeem aan jouw bij (a) gevonden voorwaarden? Verklaar je antwoord.
(Uitsluitend ter controle: $Y(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} \sin x + \cos x & \sin x \\ -2\sin x & -\sin x + \cos x \end{pmatrix}$.)
(c)[3] Bepaal de oplossing van

$$y'(x) - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} y(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\sin x + \cos x \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Controleer je antwoord. (Merk op dat de inhomogene term $b(x)$ samenvalt met de rechter kolom van $Y(x)$ op een e-macht na. Dus $Y(s)^{-1}b(s) = e^{2s}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.)

Z.O.Z.

4.[1] (a)[4] Beschouw het homogene systeem $x'(t) = xy$, $y'(t) = -x^2 + x$. Bepaal de stationaire punten en toon aan dat het systeem periodieke oplossingen heeft. (Aanwijzing: Bepaal de differentiaalvergelijking voor y als functie van x en los die vervolgens op.)

(b)[5] Toon aan dat het randwaardeprobleem

$$y''(x) + 4y(x) = f(x), \quad y(0) + y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0,$$

voor elke continue functie $f(x)$ op $[0, \pi]$ precies één oplossing heeft en bepaal van deze oplossing een *integraalvoorstelling* met behulp van de Greense functie.